Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2008

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

1 martie 2008

CLASA A IX-A
SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Subiectul 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că $|a_{n+1}-a_n|\leq 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Să se arate că $|b_{n+1}-b_n|\leq \frac{1}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Din faptul că $|a_{n+1}-a_n|\leq 1$, deducem, folosind inegalitatea modulului, că $|a_n-a_m|\leq |n-m|$, pentru orice $n,m\in\mathbb{N}^*$ .... 3 puncte

Obţinem că

$$|b_{n+1}-b_n|=\left|\frac{a_1+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right|=$$

$$=\frac{|na_{n+1}-a_1-\cdots-a_n|}{n(n+1)}=\frac{|a_{n+1}-a_1+\cdots+a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)}\leq$$

$$\leq\frac{|a_{n+1}-a_1|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)}\leq\frac{n+(n-1)+\cdots+1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}$$

....4 puncte

Subiectul 2. Fie $A=\{1,2,\ldots,n\}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$. Să se arate că A este reuniunea a trei mulţimi, disjuncte două câte două, cu acelaşi cardinal şi aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă n este multiplu de 3.

Soluţie. Dacă $A=B\cup C\cup D$, cu $B\cap C=C\cap D=D\cap B=\emptyset$ şi $|B|=|C|=|D|$, atunci $|A|=3|B|$, deci $3|n$ .... 1 punct

Reciproc, fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$, n multiplu de 3.

i) Dacă $n=6p$, $p\in\mathbb{N}^*$, atunci fie

$B=\{6k+1,6k+6 \mid k=0,1,\ldots,p-1\}$

$C=\{6k+2,6k+5 \mid k=0,1,\ldots,p-1\}$

$D=\{6k+3,6k+4 \mid k=0,1,\ldots,p-1\}$ .... 3 puncte

Această partiţie satisface evident condiţiile din problemă.

ii) Dacă $n = 6p + 3$, $p \in \mathbb{N}^*$:

a) pentru $p = 1$ fie $B = \{1, 5, 9\}, C = \{2, 6, 7\}, D = \{3, 4, 8\}$ ..... 1 punct

b) Pentru $p \geq 2$, considerăm

$B = \{1, 5, 9\} \cup \{6k + 10, 6k + 15 \mid k = 0, 1, \dots, p - 2\}$

$C = \{2, 6, 7\} \cup \{6k + 11, 6k + 14 \mid k = 0, 1, \dots, p - 2\}$

$D = \{3, 4, 8\} \cup \{6k + 12, 6k + 13 \mid k = 0, 1, \dots, p - 2\}$ .... 2 puncte

Subiectul 3. Să se găsească valorile numărului natural n pentru care $\left[\dfrac{2^n}{n}\right]$ este o putere a lui 2.

Soluţie. Fie $2^k = \left[\frac{2^n}{n}\right]$, cu $k \in \mathbb{N}$; atunci $n2^k \leq 2^n < n(2^k + 1)$, deci există $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq n - 1$ astfel încât $2^n = n2^k + r$ .... 1 punct

i) Dacă $2^k < n$, atunci $2^n < n^2 + n$. Prin inducţie rezultă $2^n > n^2 + n$ pentru $n \geq 5$. Se verifică că $n = 4$ convine .... 2 puncte

ii) Pentru $n \geq 5$ avem $2^k \geq n$, deci $2^k > r$. Dar $2^n = n2^k + r$ implică $2^k | r$ de unde $r = 0$, ceea ce atrage $n = 2^{n-k}$, deci n este o putere a lui 2.

Prin urmare $n \in \{2^p \mid p \in \mathbb{N}\}$.................................4 puncte

Subiectul 4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu P punctul de intersecţie a dreptelor AD şi BC, şi cu Q punctul de intersecţie a dreptelor AB şi CD. Fie E al patrulea vârf al paralelogramului $ABCE$ şi F intersecţia dreptelor CE şi PQ. Demonstraţi că punctele D, E, F şi Q sunt conciclice.

Soluţie. Cum $\angle BAP = \angle DCP$, triunghiurile BAP şi DCP sunt asemenea. Deci

$$\frac{BA}{DC} = \frac{BP}{DP} \tag{1}$$

.... 1 punct Avem că $\angle CDP = \angle CBQ$ (sau suplementul) şi $\angle BCQ$ (sau $\angle PCD = 180° - \angle BCQ$). Cu teorema sinusurilor în triunghiurile BCQ, DCP obţinem

$$\frac{CP}{DP} = \frac{CQ}{BQ} \tag{2}$$

.... 2 puncte

Mai observăm că:

$$\frac{CF}{BQ} = \frac{CP}{BP} \tag{3}$$

şi din paralelogram $EC = AB$ (4)

Aşadar

$$EC \cdot CF = \frac{AB \cdot CP \cdot BQ}{BP}$$

conform (3) şi (4), cantitate egală cu $\frac{DC \cdot CP \cdot BQ}{DP}$ conform (1), egală cu $DC \cdot CQ$ conform (2). Aşadar D, E, F, Q sunt conciclice. .... 4 puncte